

# ENTWURF VON MECHANISMEN

Prof. Dr.-Ing. Oskar Wallrapp



Fachhochschule München  
Fachbereich 06 - Feinwerk- und Mikrotechnik

Das vorliegende Manuskript wurde als Hilfsmittel für die Vorlesung Getriebetechnik und Robotik erstellt.

Eine – auch auszugsweise – Wiedergabe oder Veröffentlichung bedarf der Genehmigung des Verfassers.

All copyrights are preserved.

Das Manuskript können Sie herunterladen unter  
[http://www.fh-muenchen.de/fb06/professoren/wallrapp/d\\_wallrapp\\_o.html](http://www.fh-muenchen.de/fb06/professoren/wallrapp/d_wallrapp_o.html)

München, Oktober 2005

Prof. Dr. O. Wallrapp

Vielleicht ist auch noch für Sie das Programm MDA von Bedeutung!

**Entwurf von Mechanismen**

**MDA**

User  
ow

Erreichte Punkte  
7 von 129

Themen/Aufgaben

- 1 Laufgrad
  - 01:Peaucellier Lenker ✓
  - 02:Stallforth-Mech.
  - 03:Wellenlagerung
  - 04:Prüfstand ✓
- 2 Rädergetriebe
  - 01:Planetengetriebe
  - 02:Turmantrieb
  - 03:Beschleunigung
- 3 Übertragungsfunktion

Manuskript

MultiMech Quit

Rechner Hilfe

Optionen

**Sind Sie fit  
für die Prüfung?  
Testen Sie sich!**

Das Programm ist bei Prof. Wallrapp zu beziehen.

**Inhaltsverzeichnis****Seite**

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>Kap1</b>
1.1	Was ist ein Mechanismus?.....	1
1.1.1	Einteilung der Mechanismen .....	2
1.1.2	Häufig verwendete Elementar-Mechanismen.....	6
1.2.	Mechanismen mit speziellen Funktionen .....	7
1.3	Methoden für den Entwurf von Mechanismen.....	15
1.4	Programme zur Analyse und Synthese von Mechanismen.....	16
1.5	Literatur und Nachschlagewerke .....	18
1.5.1	Getriebetechnik.....	18
1.5.2	Finite Elemente Methode und Mehrkörperdynamik.....	18
1.5.3	Robotik .....	18
1.5.4	Referenzen.....	18
<b>2</b>	<b>Modellbildung und Begriffe der Getriebetechnik.....</b>	<b>Kap 2</b>
2.1	Glieder.....	1
2.2	Gelenke.....	2
2.3	Abbildungen eines Getriebes .....	8
2.4	Freiheitsgrade oder Laufgrad eines Mechanismus.....	10
2.4.1	Laufgrad F.....	10
2.4.2	Ebene kinematische Ketten mit einem Freiheitsgrad.....	12
2.5	Mechanismen der Viergelenkkette.....	14
2.5.1	Getriebe der 4-gliedrigen Drehgelenkkette – Satz von Grashof.....	14
2.5.2	Getriebe der 4-gliedrigen Schubkurbelkette.....	16
2.6	Laufgüte und Übertragungswinkel $\mu$ .....	18
2.7	Totlagen der Kurbelschwinge und Schubkurbel.....	20
2.8	Koppelkurven von Getrieben.....	22
2.9	Offene und geschlossene Ketten.....	23
2.9.1	Offene Ketten von Körpern (Gliedern).....	24
2.9.2	Geschlossene Ketten von Körpern (Gliedern).....	25
2.9.3	Lösen der Schließbedingungen.....	26
2.10	Übertragungsfunktionen und Übersetzung .....	27
2.11	Geschwindigkeitspol eines Gliedes .....	30
2.12	Leistungsbilanz, Wirkungsgrad, mechanische Äquivalenz .....	32
	<b>Aufgaben zu Kap. 2 (Lösungen siehe auch Internet) .....</b>	<b>2.35</b>
<b>3</b>	<b>Analyse der Kinematik ebener Mechanismen.....</b>	<b>Kap 3</b>
3.1	Aufgabenstellung und Vorgehensweisen .....	3.1
3.1.1	Was erwarten wir von der kinematischen Analyse? .....	3.1
3.1.2	Vorgehensweise der kinematischen Auswertung.....	3.2
3.2.	Analytische Auswertung einer ebenen offenen Kette .....	3.3
3.2.1	Zweiarmiger Roboter in der Ebene in kartesischen Koordinaten .....	3.3
3.3	Analytische Auswertung einer ebenen geschlossenen Kette.....	3.6

3.3.1 Ebene, schwingende, zentrische Kurbelschleife.....	3.6
3.3.2 Ebene Kurbelschwinge .....	3.11
3.4 Graphische Ermittlung der Geschwindigkeiten ebener Getriebe.....	3.16
3.4.1 Zeichenmaßstäbe der Bewegungsgrößen.....	3.16
3.4.2 Momentanpol (Geschwindigkeitspol) des starren Körpers .....	3.17
3.4.3 Geschwindigkeitszustand einer um A0 rotierenden Ebene .....	3.18
3.4.4 Geschwindigkeitszustand einer bewegten Ebene in der Ebene.....	3.20
3.5 Graphische Ermittlung des Beschleunigungen ebener Getriebe.....	3.25
3.5.1 Beschleunigungszustand einer um A0 rotierenden Ebene.....	3.25
3.5.2 Beschleunigungszustand einer bewegten Ebene in der Ebene.....	3.29
3.6 Graphische Ermittlung des Relativzustandes dreier Ebenen .....	3.34
3.6.1 Bewegungszustand eines auf einer bewegten Ebene wandernden Punktes.....	3.34
<b>Aufgaben zu Kap. 3 (Lösungen siehe auch Internet).....</b>	<b>3.39</b>
<b>4 Bewegung starrer Körper .....</b>	<b>Kap 4</b>
4.1 Kartesische Koordinatensysteme.....	4.1
4.2 Drehmatrizen .....	4.2
4.2.1 Darstellung eines Vektors in den kartesischen Systemen K1 und K2 .....	4.2
4.2.2 Eigenschaften der Drehmatrizen.....	4.4
4.2.3 Darstellung eines Vektors in Polar- / Zylinderkoordinaten.....	4.6
4.3 Position und Orientierung des freien, starren Körpers im Raum .....	4.7
4.4 Verwendung dreier Koordinatensysteme .....	4.8
4.5 Einführung homogener Transformationen.....	4.9
4.6 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des starren Körpers .....	4.10
4.6.1 Absolute Winkelgeschwindigkeit der Körperbasis.....	4.10
4.6.2 Absolute Winkelbeschleunigung der Körperbasis.....	4.11
4.6.3 Absolute Lineargeschwindigkeit der Körperbasis.....	4.11
4.6.4 Absolute Linearbeschleunigung der Körperbasis .....	4.11
4.7 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Körperpartikels.....	4.12
<b>Aufgaben zu Kap. 4 (Lösungen siehe auch Internet).....</b>	<b>4.13</b>
<b>5 Zur Robotik.....</b>	<b>Kap 5</b>
5.1 Einführung.....	5.1
5.1.1 Historische Entwicklung .....	5.1
5.1.2 Wozu Roboter?.....	5.2
5.1.3 Heutige Anwendungsbereiche von Industrierobotern.....	5.3
5.1.4 Neue Anwendungsbereiche von Robotern.....	5.5
5.2 Das System "Industrieroboter" .....	5.7
5.2.1 Teilsysteme des Industrieroboters und ihre Funktionen .....	5.7
5.2.2 Grundkonfigurationen von Robotern mit 3 FHG.....	5.8
5.2.3 Feinbewegung der Effektoren.....	5.9
5.2.4 Varianten für Effektorbewegungen.....	5.10
5.3 Kinematik der Roboter.....	5.11
5.3.1 Notation .....	5.11

5.3.2	Kinematik des Effektors.....	5.12
5.3.3	Denavit-Hartenberg-Transformation .....	5.13
5.3.4	Inverse Kinematik (Rückwärtstransformation) .....	5.16
5.3.5	Kleine Bewegungsänderungen um einen Arbeitspunkt.....	5.18
5.3.6	Zusammenfassung der Kinematik von Robotern.....	5.19
5.4	Bahnsteuerung und Programmierung von Robotern.....	5.20
5.4.1	Prinzip der Bahnsteuerung.....	5.20
5.4.2	Mögliche Bahnkurven .....	5.21
5.4.3	Mögliche Steuerungen .....	5.22
5.4.4	Programmierverfahren.....	5.23
5.4.5	Programmiersprachen.....	5.26
5.5	Roboterwerkzeuge .....	5.27
5.5.1	Greifer.....	5.27
	Anhang A: Beispiel für ein SRCL-Programm.....	5.30
	<b>Aufgaben zu Kap. 5</b> (Lösungen siehe auch Internet).....	5.31
<b>6</b>	<b>Analyse der Dynamik ebener Mechanismen .....</b>	<b>Kap 6</b>
6.1	Zweck und Aufgabenstellungen der Dynamik .....	6.1
6.2	Gliederung und Notation der Kräfte und Momente.....	6.3
6.3	Gleichgewichtsbedingungen der Statik und Kinetik.....	6.5
6.4	Analyse der Statik und Kinetostatik mit Schnittprinzip & Gleichgewichtsverfahren.....	6.8
6.4.1	Übung 6.1: Analytisches Gleichgewichtsverfahren - Kinetostatik zweiarmiger Roboter.....	6.9
6.4.2	Übung 6.2: Analytisches Gleichgewichtsverfahren - Statik Tischfeuerzeug.....	6.13
6.4.3	Graphisches Gleichgewichtsverfahren- nur eine äußere Kraft je Gruppe .....	6.16
6.5	Analyse der Statik und Kinetostatik nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen .....	6.20
6.5.1	Analytische Auswertung der Kinetostatik des zweiarmigen Roboters .....	6.22
6.5.2	Übung 6.3: Analytische Auswertung der Statik des Tischfeuerzeuges .....	6.24
6.5.3	Graphisches Verfahren zum Prinzip der virtuellen Leistungen.....	6.26
6.6	Berücksichtigung von Reibung in Gelenken .....	6.28
	<b>Aufgaben zu Kap. 6</b> (siehe auch home page) .....	6.31
<b>7</b>	<b>Synthese ebener Mechanismen .....</b>	<b>Kap 7</b>
7.1	Allgemeines Begriffe.....	7.1
7.1.1	Gliederung der Synthese .....	7.1
7.1.2	Anforderungen an die Kinematiksynthese.....	7.2
7.1.3	Strategie / Vorgehensweise .....	7.3
7.2	Wertigkeitsbilanz.....	7.4
7.2.1	Wertigkeit der Vorgaben bzw. Anforderungen eines Getriebes.....	7.5
7.2.2	Parameter wichtiger Getriebe.....	7.6
7.2.3	Beispiele zur Wertigkeit.....	7.8
7.3	Konstruktion von Getrieben für absolute Lagen einer Ebene - Bewegungsgenerator.....	7.9
7.3.1	Zwei endlich benachbarte Lagen E1 und E2.....	7.9
7.3.2	Zwei unendlich benachbarte Lagen E1 und E2.....	7.12

7.3.3	Drei endlich benachbarte Lagen E1, E2 und E3.....	7.13
7.4	Konstruktion von Getrieben für Vorgaben relativer Lagen zweier Ebenen P und Q — Bewegungsgenerator .....	7.16
7.4.1	Zwei endlich benachbarte Relativlagen zweier Ebenen P und Q .....	7.17
7.5	Konstruktion von Getrieben für Übertragungsfunktionen – Funktionsgenerator.....	7.18
7.5.1	Drei Zuordnungen von Drehwinkel und Verschiebungen der Schubkurbel .....	7.19
7.5.2	Zwei unendliche benachbarte Drehwinkel-Zuordnungen der Kurbelschwinge.....	7.20
7.5.3	Totlagen des Getriebes als Funktionsvorgaben .....	7.21
7.5.4	Totlagenkonstruktion nach ALT .....	7.22
7.5.5	Analytische Auswertung der Totlagenkonstruktion nach Alt.....	7.26
7.6	Konstruktion von Getrieben zur Erzeugung von Punktlagen und Koppelkurven – Pfad- Generator .....	7.28
7.6.1	Erfüllung von drei Koppelpunkten .....	7.29
7.6.2	Dreifache Erzeugung der Koppelkurve (Satz von Roberts).....	7.30
7.6.3	Erzeugung von Geradföhrungen.....	7.31
7.7	Bestimmung von Kurvenscheiben – Funktionsgenerator.....	7.32
7.7.1	Grundbegriffe .....	7.32
7.7.2	Systematik von Kurvengetrieben.....	7.33
7.7.3	Übertragungsverhalten .....	7.34
7.7.4	Kinematische Abmessungen von Kurvengetrieben.....	7.39
7.7.5	Hodografverfahren.....	7.41
7.7.6	Analytische Lösung der Kurvenscheiben mit Rollenstößel .....	7.45
7.7.7	Analytische Lösung der Kurvenscheiben mit Tellerstößel.....	7.46
	<b>Aufgaben zu Kapitel 7</b> (Lösungen siehe auch Internet).....	7.47

# Notation

## 1. Allgemein:

**Skalare** beliebige Buchstaben einschließlich griechische Buchstaben, z.B.  $a, b, P, x_i, \alpha, \beta, \gamma, \lambda$

**Indizes** mit kleinen Buchstaben, z.B.  $i, j, k, l$

**Matrizen und Vektoren** sind Felder mit Skalare. Ein Vektor ist die Spalte einer Matrix.

unabhängig vom speziellen Vektorraum und unabhängig von einer speziellen Basis

**Vektoren** sind Kleinbuchstaben, im Manuskript Fettdruck, z. B.

$$(1) \quad \mathbf{x} = (x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n), (x_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

beim Handschreiben (an der Tafel) wird der Buchstabe unterstrichen z.B.  $\underline{x} = (x_i)$ ,

**Vektornorm** (2) 
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

**Matrizen** sind Großbuchstaben im Manuskript Fettdruck z.B.

$$(3) \quad \mathbf{M} = (M_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

beim Handschreiben (an der Tafel) wird der Buchstabe doppelt unterstrichen  $\underline{\underline{M}} = (M_{ij})$ .

## 2. "Physikalische Vektoren" im Raum $\mathfrak{R}^2$ oder $\mathfrak{R}^3$ nach Hamel

unabhängig von einer speziellen Basis

**Vektoren** mit Klein- oder Großbuchstaben, mit Pfeil oben, z.B.

$$\vec{v}, \vec{F}$$

**Betrag** oder Länge eines Vektors, z. B.

$$(4a) \quad v = |\vec{v}|; \quad F = |\vec{F}|;$$

**Richtung** eines Vektors, z. B. Richtungsvektor  $\vec{e}_v$  mit  $|\vec{e}_v| = 1$ :

$$(4b) \quad \vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = v \vec{e}_v$$

## 3. Darstellung eines Vektors im Koordinatensystem

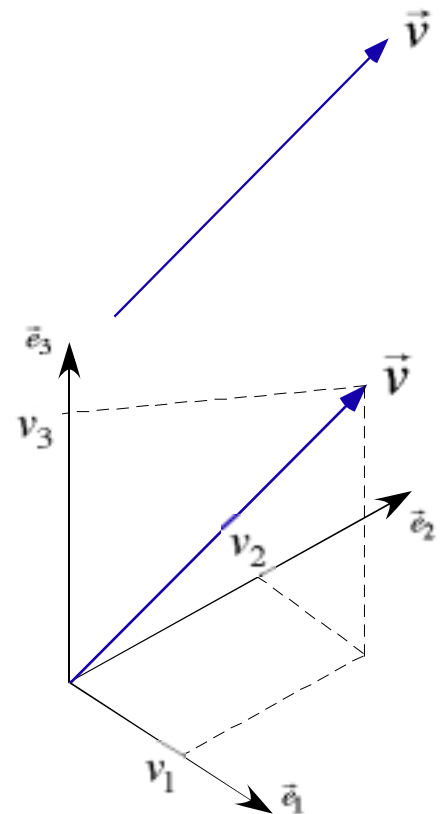
mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (3D oder 2D),

wo  $|\vec{e}_i| = 1$ , z.B.

$$(5) \quad \vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3 \equiv \vec{e}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \vec{e}$$

wo 
$$\mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = (\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

und  $v_1, v_2, v_3$  sind die Koordinaten oder Komponenten des Vektors  $\vec{v}$ .

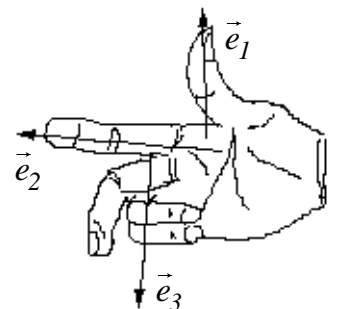


Speziell: **kartesisches Rechtshandsystem**

$$(6) \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \vec{e} \cdot \vec{e}^T = \mathbf{E}$$

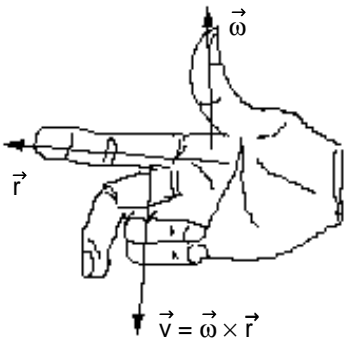
also  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$  und  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$

$$(7) \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \vec{e} \times \vec{e}^T = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 & 0 & \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\vec{e}}^T$$



wo  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix,  $\varepsilon_{ijk}$  der Permutationstensor,  $\tilde{\phantom{x}}$  der Tilde-Operator für  $\varepsilon_{ijk}$

## 4. Zuordnung Vektorrechnung und Matrizenrechnung

Vektor- (Tensor-) Rechnung	Matrizenrechnung mit den Komponenten bez. Basisrichtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
Vektor $\vec{v}$	$\mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$
Betrag (Länge) $v =  \vec{v} $	$v =  \mathbf{v}  = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
Addition $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i) + (b_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
Subtraktion $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a}$	$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_i) - (b_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$
Produkt Skalar mit Vektor $\vec{v} = \lambda \vec{a} = \lambda a \vec{e}_a$	$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{a} = (a_i) + (b_i) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} = \lambda a \begin{pmatrix} e_{v1} \\ e_{v2} \\ e_{v3} \end{pmatrix}$
Skalarprodukt $\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $= ab \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$	$\mu = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Kreuzprodukt $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $v =  \vec{v}  = ab \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$	$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ (auch $\tilde{\mathbf{a}} \equiv \tilde{\mathbf{A}}$ möglich) $= \begin{pmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ +a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ -a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{pmatrix}$ wo $\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$
Beachte: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$	$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{a}}^T = -\tilde{\mathbf{a}}$
Beispiel Kinematik $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	 $\mathbf{v} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\omega_z r_y + \omega_y r_z \\ +\omega_z r_x - \omega_x r_z \\ -\omega_y r_x + \omega_x r_y \end{pmatrix}$
Beispiel Statik $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	aber $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \cdot & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y \omega_z \\ \text{symm.} & \cdot & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix}$
Diadisches Produkt $\vec{I} = \vec{a} \circ \vec{b}$  = Tensor 2. Stufe	$\mathbf{I} = (I_{ij}) = \mathbf{a} \mathbf{b}^T, \quad \mathbf{I}^T = \mathbf{b} \mathbf{a}^T$ $= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$



## 5. Koordinatensystem, Ortsvektor und Drehmatrix

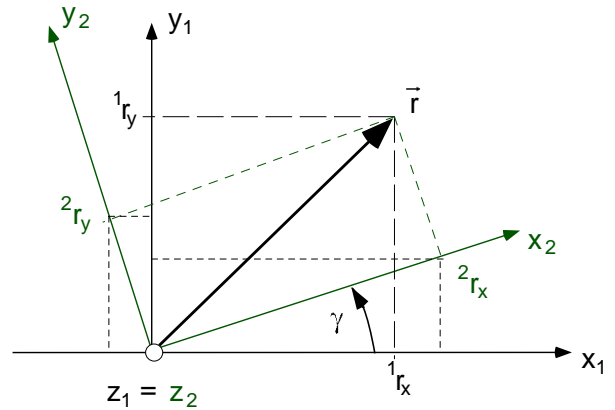
Koordinatensysteme:  $K_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $K_2(x_2, y_2, z_2)$ :

Ortsvektor:  $\vec{r} = \vec{e}_{x1} {}^1r_x + \vec{e}_{y1} {}^1r_y + \vec{e}_{z1} {}^1r_z = \vec{e}_1^T {}^1\mathbf{r} \equiv \vec{e}_{x2} {}^2r_x + \vec{e}_{y2} {}^2r_y + \vec{e}_{z2} {}^2r_z = \vec{e}_2^T {}^2\mathbf{r}$

Die Koordinaten oder Komponenten sind

$${}^1\mathbf{r} = \begin{pmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{pmatrix} \text{ in } K_1$$

$${}^2\mathbf{r} = \begin{pmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ {}^2r_z \end{pmatrix} \text{ in } K_2 \neq {}^1\mathbf{r}$$



Drehung zweier Koordinatensysteme

Betrag von  $\vec{r}$ :  $r = \sqrt{{}^1r_x^2 + {}^1r_y^2 + {}^1r_z^2} = \sqrt{{}^2r_x^2 + {}^2r_y^2 + {}^2r_z^2}$

Transformation in der x-y-Ebene bei Drehung um z:

$$\begin{pmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ {}^2r_z \end{pmatrix}$$

$${}^1\mathbf{r} = \mathbf{A}^{12}(\gamma) {}^2\mathbf{r}$$

☞  $\mathbf{A}^{12}$  ist **Dreh- oder Orientierungsmatrix** von Basis  $K_2$  gegenüber  $K_1$

☞ Drehung um **z**-Achse mit Drehwinkel  $\gamma$ :  $\mathbf{A}^{12}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ebenso  $\vec{e}_1 = \mathbf{A}^{12} \vec{e}_2$

$\gamma$  ist positiv, wenn man  $x_1$ -Achse in Deckung mit  $x_2$ -Achse bringt, also eine positive Drehung um z-Achse ausführt.

☞ **Eigenschaften:**  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , weil  $\mathbf{A}$  eine orthogonale Matrix

☞ **Umkehrung:**  $\vec{e}_2 = \mathbf{A}^{21} \vec{e}_1 = (\mathbf{A}^{12})^T \vec{e}_1$  oder  ${}^2\mathbf{r} = (\mathbf{A}^{12})^T {}^1\mathbf{r}$

☞ **falls**  $\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_2$ :  $\mathbf{A}^{12} = \mathbf{E}$ ;  ${}^1\mathbf{r} = {}^2\mathbf{r}$

☞ **Linearisierung** von  $\mathbf{A}^{12}$  (kleine Drehwinkel  $\gamma \ll 1$ ):  $\cos\gamma \approx 1$ ,  $\sin\gamma \approx \gamma$

$$\text{in x-y-Ebene mit Drehwinkel } \gamma: \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformation im Raum, siehe z.B. (Roberson and Schwertassek 1988)

☞ Eine allgemeine Drehung kann durch drei Einzeldrehungen erzeugt werden:

a) Kardanwinkel mit den Drehkoordinaten  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  in der Drehfolge 1-2-3

Drehung der Basis  $K_1$  gegenüber Basis  $K_2$  mit 3 Elementardrehungen:

1. um  $x_1$  - Achse mit Winkel  $\alpha$ , -> neue Achsen  $y'$ ,  $z'$  und  $x'$  bei  $x' = x_1$
2. um  $y'$  - Achse mit Winkel  $\beta$ , -> neue Achsen  $x''$ ,  $z''$  und  $y''$  bei  $y'' = y'$
3. um  $z''$  - Achse mit Winkel  $\gamma$ . -> neue Achsen  $x_2$ ,  $y_2$  und  $z_2$  bei  $z_2 = z''$

$$\text{Transformation } \bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_2 \quad \text{wo } c \equiv \cos, s \equiv \sin$$

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}(\alpha) \quad \mathbf{A}(\beta) \quad \mathbf{A}(\gamma) \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}^{12} \bar{\mathbf{e}}_2$$

$$\text{mit der Drehmatrix } \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -s\alpha c\beta \\ s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma & s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

☞ **Linearisierung** von  $\mathbf{A}^{12}$  für kleine Drehwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$ : (Für  $\sim$  siehe Rechenregeln-Tilde-Operator)

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

b) Andere Drehbeschreibungen:

Kardanwinkel der Drehfolge z-y-x;

Eulerwinkel mit Drehfolge z-x-z;

Drehzeiger, Eulerparameter, Rodriguesparameter

## 6. Differentiation von Funktionen (Kettenregel):

$$\text{Funktion } a(\varphi(t)): \quad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

$$\text{Funktion } a(\varphi(t), \gamma(t)): \quad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial a}{\partial \gamma} \dot{\gamma}$$

**Benennungen**

$K$	Kennzeichnung eines Koordinatensystems
$I$	Inertialsystem
$B$	körperfestes System
$R$	Referenzsystem (Zwischensystem)
$\vec{e}_i$	Basisvektoren, $i = x, y, z$ oder $i, 2, 3$ ; $\vec{e}_i$ sind Einheitsvektoren mit $ \vec{e}_i  = 1$
$x, y, z$ oder $1, 2, 3$	Basisrichtungen eines Koordinatensystems $K$
$X, Y, Z$	Basisrichtungen des Inertialsystems $I$ , (gestellfest)
$s, v, a$	Bewegungsgrößen für Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung
$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \delta, \theta$	Drehwinkel
$\omega, \alpha$	Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung
$k_r = (k_{r_x}, k_{r_y}, k_{r_z})^T$	Vektor mit Koordinaten in Basis $K$ , keine Angabe, $0, I$ bedeuten Inertialsystem.
$A^{IB}$	$3 \times 3$ Drehmatrix der Basis $B$ gegenüber $I$ : $\vec{e}_I = A^{IB} \vec{e}_B$ , oder ${}^I v = A^{IB} {}^B v$
$2D$	Ebene Betrachtung (freier Körper hat 3 Bewegungsmöglichkeiten)
$3D$	Räumliche Betrachtung (freier Körper hat 6 Bewegungsmöglichkeiten)
$E$	Einheitsmatrix
$A^T$	Transponierte der Matrix $A$ ; es gilt $(A_{ij})^T = (A_{ji})$
$A^{-1}$	Inverse der Matrix $A$ ; es gilt $A^{-1} A = E$ , wo $E$ die Einheitsmatrix
CAD	Computer Aided Design
FEM	Finite Elemente Methode
MKS	Mehrkörpersystem
GGB	Gleichgewichtsbedingungen
AE	algebraic equations
DE	differential equations
DAE	differential algebraic equations
FHG	Freiheitsgrad
DOF	Degree of Freedom
$l, r, a, b, c, d, k, \dots$	Abstände
$e$	Exzentrizität
$0, 1, 2, 3, \dots$	Glieder eines Getriebes
$12, \dots$	Gelenk eines Getriebes zwischen Glied 1 und 2
$A, B,$	Koppelpunkte eines Gliedes
$A_0, B_0, \dots$	Koppelpunkte am Gestell