ENTWURF VON MECHANISMEN

Prof. Dr.-Ing. Oskar Wallrapp

Fachhochschule München
Fachbereich 06 - Feinwerk- und Mikrotechnik

Das Manuskript können Sie herunterladen unter

http://www.fh-muenchen.de/fb06/professoren/wallrapp/d_wallrapp_o.html

München, Oktober 2005 Prof. Dr. O. Wallrapp

Vielleicht ist auch noch für Sie das Programm MDA von Bedeutung!

Das Programm ist bei Prof. Wallrapp zu beziehen.

Inhaltsverzeichnis Seite

Notation

1. Allgemein:

Skalare beliebige Buchstaben einschließlich griechische Buchstaben, z.B. a, b, P, x_j, $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$

Indizes mit kleinen Buchstaben, z.B. *i, j, k, l*

Matrizen und Vektoren sind Felder mit Skalare. Ein Vektor ist die Spalte einer Matrix.

unabhängig vom speziellen Vektorraum und unabhängig von einer speziellen Basis

Vektoren sind Kleinbuchstaben, im Manuskript Fettdruck, z. B.

(1) $\mathbf{x} = (x_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n),\ (x_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n)$

beim Handschreiben (an der Tafel) wird der Buchstabe unterstrichen z.B. $\underline{x} = (x_i)$,

Vektornorm (2) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2}$

Matrizen sind Großbuchstaben im Manuskript Fettdruck z.B.

(3) $\mathbf{M} = (M_{ij}),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ j = 1, 2, 3, \ldots, m$

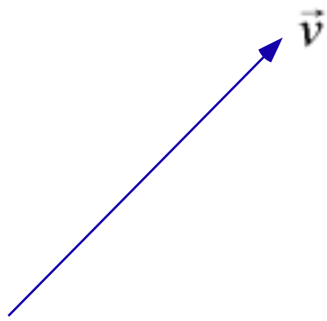
beim Handschreiben (an der Tafel) wird der Buchstabe doppelt unterstrichen $\underline{\underline{M}} = (M_{ij})$.

2. "Physikalische Vektoren" im Raum $\Re^2$ oder $\Re^3$ nach Hamel

unabhängig von einer speziellen Basis

Vektoren mit Klein- oder Großbuchstaben, mit Pfeil oben, z.B.

$\vec{v},\ \vec{F}$



Betrag oder Länge eines Vektors, z. B.

(4a) $v = |\vec{v}|;\quad F = |\vec{F}|;$

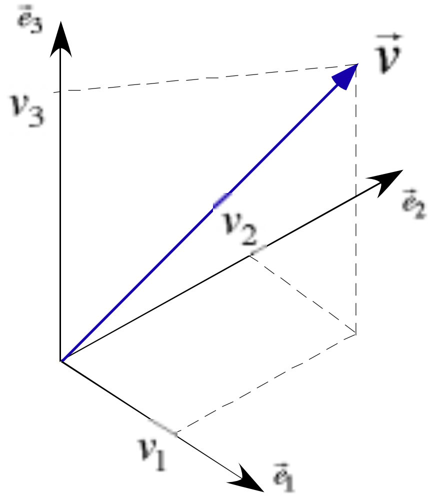
Richtung eines Vektors, z. B. Richtungsvektor $\vec{e}_v$ mit $|\vec{e}_v| = 1$:

(4b) $\vec{e}_v = \dfrac{\vec{v}}{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = v\,\vec{e}_v$

3. Darstellung eines Vektors im Koordinatensystem

mit den Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (3D oder 2D),

wo $|\vec{e}_i] = 1$, z.B.

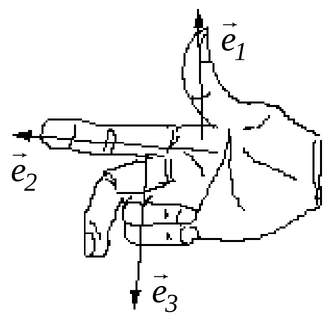


(5) $\vec{v} = \vec{e}_1\, v_1 + \vec{e}_2\, v_2 + \vec{e}_3\, v_3 \equiv \vec{\mathbf{e}}^T\, \mathbf{v} = \mathbf{v}^T\, \vec{\mathbf{e}}$

wo $\mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}} = (\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

und v_1, v_2, v_3 sind die Koordinaten oder Komponenten des Vektors $\vec{v}$.

Speziell: **kartesisches Rechtshandsystem**



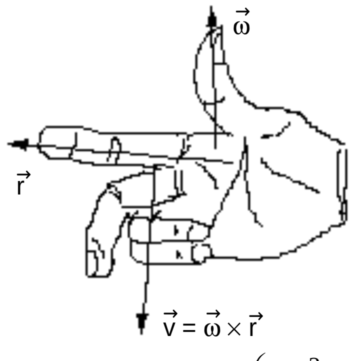
(6) $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{e}}^T = \mathbf{E}:$

also $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$ und $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0,\ i, j = 1,2,3$

(7) $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \vec{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{e}}^T = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 & 0 & \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\vec{\mathbf{e}}}^T$

wo **E** die Einheitsmatrix, ε_{ijk} der Permutationstensor, ~ der Tilde-Operator für ε_{ijk}

4. Zuordnung Vektorrechnung und Matrizenrechnung

Vektor- (Tensor-) Rechnung	**Matrizenrechnung mit den Komponenten bez. Basisrichtungen** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
Vektor $\vec{v}$	$\mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3$
Betrag (Länge) $v = \lvert\vec{v}\rvert$	$v = \lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
Addition $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i) + (b_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
Subtraktion $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a}$	$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_i) - (b_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$
Produkt Skalar mit Vektor $\vec{v} = \lambda\,\vec{a} = \lambda\, a\, \vec{e}_a$	$\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{a} = (a_i) + (b_i) = \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 \\ \lambda\, a_2 \\ \lambda\, a_3 \end{pmatrix} = \lambda\, a \begin{pmatrix} e_{v1} \\ e_{v2} \\ e_{v3} \end{pmatrix}$
Skalarprodukt $\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $= a\,b \cos\angle(\vec{a},\vec{b})$	$\mu = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$
Kreuzprodukt $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $v = \lvert\vec{v}\rvert = a\,b \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ Beachte: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$	$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ (auch $\tilde{\mathbf{a}} \equiv \tilde{\mathbf{A}}$ möglich) $= \begin{pmatrix} -a_3\, b_2 + a_2\, b_3 \\ +a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ -a_2\, b_1 + a_1\, b_2 \end{pmatrix}$ wo $\tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ $\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{a}}^T = -\tilde{\mathbf{a}}$
Beispiel Kinematik $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ Beispiel Statik $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	 $\mathbf{v} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\omega_z\, r_y + \omega_y\, r_z \\ +\omega_z\, r_x - \omega_x\, r_z \\ -\omega_y\, r_x + \omega_x\, r_y \end{pmatrix}$ aber $\tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \left(\begin{array}{c:c:c} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\,\omega_y & \omega_x\,\omega_z \\ \hdashline . & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y\,\omega_z \\ \hdashline symm. & . & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{array}\right)$
Diadisches Produkt $\vec{\vec{I}} = \vec{a} \circ \vec{b}$ = Tensor 2. Stufe	$\mathbf{I} = (I_{ij}) = \mathbf{a}\,\mathbf{b}^T, \quad \mathbf{I}^T = \mathbf{b}\,\mathbf{a}^T$ $= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\, b_1 & a_1\, b_2 & a_1\, b_3 \\ a_2\, b_1 & a_2\, b_2 & a_2\, b_3 \\ a_3\, b_1 & a_3\, b_2 & a_3\, b_3 \end{pmatrix}$

5. Koordinatensystem, Ortsvektor und Drehmatrix

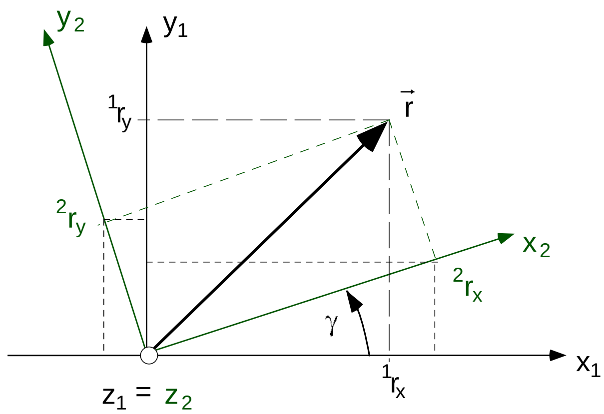
Koordinatensysteme: $K_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $K_2\ (x_2, y_2, z_2)$:

Ortsvektor: $\vec{r} = \vec{e}_{x1}\,{}^1r_x + \vec{e}_{y1}\,{}^1r_y + \vec{e}_{z1}\,{}^1r_z = \vec{\mathbf{e}}_1^T\ {}^1\mathbf{r} \equiv \vec{e}_{x2}\,{}^2r_x + \vec{e}_{y2}\,{}^2r_y + \vec{e}_{z2}\,{}^2r_z = \vec{\mathbf{e}}_2^T\ {}^2\mathbf{r}$

Die Koordinaten oder Komponenten sind

$${}^1\mathbf{r} = \begin{pmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{pmatrix} \text{ in } K_1$$

$${}^2\mathbf{r} = \begin{pmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ {}^2r_z \end{pmatrix} \text{ in } K_2 \neq {}^1\mathbf{r}$$



Drehung zweier Koordinatensysteme

Betrag von $\vec{r}$: $r = \sqrt{{}^1r_x^2 + {}^1r_y^2 + {}^1r_z^2} = \sqrt{{}^2r_x^2 + {}^2r_y^2 + {}^2r_z^2}$

Transformation in der x-y-Ebene bei Drehung um z:

$$\begin{pmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ {}^2r_z \end{pmatrix}$$

$${}^1\mathbf{r} \quad = \quad \mathbf{A}^{12}(\gamma) \quad {}^2\mathbf{r}$$

☞ $\mathbf{A}^{12}$ ist **Dreh- oder Orientierungsmatrix** von Basis K_2 gegenüber K_1

☞ Drehung um **z**-Achse mit Drehwinkel γ: $\mathbf{A}^{12}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ebenso $\vec{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}^{12}\,\vec{\mathbf{e}}_2$

γ ist positiv, wenn man x_1-Achse in Deckung mit x_2-Achse bringt, also eine positive Drehung um z-Achse ausführt.

☞ **Eigenschaften**: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, weil **A** eine orthogonale Matrix

☞ **Umkehrung**: $\vec{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}^{21}\vec{\mathbf{e}}_1 = \left(\mathbf{A}^{12}\right)^T \vec{\mathbf{e}}_1$ oder ${}^2\mathbf{r} = \left(\mathbf{A}^{12}\right)^T\ {}^1\mathbf{r}$

☞ **falls** $\underline{\vec{e}}_1 \equiv \underline{\vec{e}}_2$: $\mathbf{A}^{12} = \mathbf{E}$; ${}^1\mathbf{r} = {}^2\mathbf{r}$

☞ **Linearisierung** von $\mathbf{A}^{12}$ (kleine Drehwinkel $\gamma \ll 1$): $\cos\gamma \approx 1$, $\sin\gamma \approx \gamma$

in x-y-Ebene mit Drehwinkel γ: $\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformation im Raum, siehe z.B. (Roberson and Schwertassek 1988)

☞ Eine allgemeine Drehung kann durch drei Einzeldrehungen erzeugt werden:

a) Kardanwinkel mit den Drehkoordinaten $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ in der Drehfolge 1-2-3

Drehung der Basis K_1 gegenüber Basis K_2 mit 3 Elementardrehungen:

1. um x_1 - Achse mit Winkel α, -> neue Achsen y', z' und x' bei x' = x_1
2. um y' - Achse mit Winkel β, -> neue Achsen x'', z'' und y'' bei y'' = y'
3. um z'' - Achse mit Winkel γ. -> neue Achsen x_2, y_2 und z_2 bei z_2 = z''

$$\text{Transformation} \quad \vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_2 \quad \text{wo } c \equiv \cos,\ s \equiv \sin$$

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \quad \mathbf{A}(\alpha) \qquad \mathbf{A}(\beta) \qquad \mathbf{A}(\gamma) \quad \vec{\mathbf{e}}_2 \quad = \mathbf{A}^{12}\, \vec{\mathbf{e}}_2$$

$$\text{mit der Drehmatrix} \quad \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -s\alpha c\beta \\ s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma & s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

☞ **Linearisierung** von $\mathbf{A}^{12}$ für kleine Drehwinkel α, β, γ: (Für ~ siehe Rechenregeln–Tilde-Operator)

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \quad mit \quad \boldsymbol{\vartheta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

b) Andere Drehbeschreibungen:

Kardanwinkel der Drehfolge z-y-x;

Eulerwinkel mit Drehfolge z-x-z;

Drehzeiger, Eulerparameter, Rodriguesparameter

6. Differentiation von Funktionen (Kettenregel):

$$Funktion \quad a(\varphi(t)): \qquad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \varphi}\dot{\varphi}$$

$$Funktion \quad a(\varphi(t),\gamma(t)): \quad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial a}{\partial \gamma}\dot{\gamma}$$

Benennungen

K	Kennzeichnung eines Koordinatensystems
I	Inertialsystem
B	körperfestes System
R	Referenzsystem (Zwischensystem)
$\vec{e}_i$	Basisvektoren, i = x,y,z oder i,2,3; $\vec{e}_i$ sind Einheitsvektoren mit $\lvert\vec{e}_i\rvert = 1$
x,y,z oder 1,2,3	Basisrichtungen eines Koordinatensystems K
X,Y,Z	Basisrichtungen des Inertialsystems I, (gestellfest)
s, v, a	Bewegungsgrößen für Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung
$\alpha,\beta,\gamma,\varphi,\psi,\delta,\theta$	Drehwinkel
ω, α	Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung
${}^k\mathbf{r} = ({}^k r_x, {}^k r_y, {}^k r_z)^T$	Vektor mit Koordinaten in Basis k, keine Angabe, 0, I bedeuten Inertialsystem.
$\mathbf{A}^{IB}$	3×3 Drehmatrix der Basis B gegenüber I: $\vec{\mathbf{e}}_I = \mathbf{A}^{IB}\ \vec{\mathbf{e}}_B$, oder ${}^I\mathbf{v} = \mathbf{A}^{IB}\ {}^B\mathbf{v}$
2D	Ebene Betrachtung (freier Körper hat 3 Bewegungsmöglichkeiten)
3D	Räumliche Betrachtung (freier Körper hat 6 Bewegungsmöglichkeiten)
E	Einheitsmatrix
$\mathbf{A}^T$	Transponierte der Matrix **A**; es gilt $(A_{ij})^T = (A_{ji})$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse der Matrix **A**; es gilt $\mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A} = \mathbf{E}$, wo **E** die Einheitsmatrix

CAD	Computer Aided Design
FEM	Finite Elemente Methode
MKS	Mehrkörpersystem
GGB	Gleichgewichtsbedingungen
AE	algebraic equations
DE	differential equations
DAE	differential algebraic equations
FHG	Freiheitsgrad
DOF	Degree of Freedom

l, r,a,b,c,d,k, ..	Abstände
e	Exzentrizität
0, 1, 2, 3, ...	Glieder eines Getriebes
12, ...	Gelenk eines Getriebes zwischen Glied 1 und 2
A, B,	Koppelpunkte eines Gliedes
A_0, B_0, ..	Koppelpunkte am Gestell